# 量子ホール系におけるスピン励起(基研研究会「量子ホール効果及び関連する物理」,研究会報告)



中島, 龍也; 青木, 秀夫

# 量子ホール系におけるスピン励起

東北大学大学院　理学研究科　　中島 龍也[1]
東京大学大学院 理学系研究科　 青木 秀夫

ランダウ準位占有率が $\nu = 1/(\text{奇数})$ のとき，量子ホール系では強磁性基底状態が実現される．Quantum Hall Ferromagnet と呼ばれるこの強磁性体について簡単に説明したあと，ボゾン化法に基づいた我々のアプローチを紹介する．そして，モード間相互作用によって繰り込まれたスピン波分散に対して，1次のオーダーの表式を示す．

## 1　量子ホール系における強磁性

量子ホール系 [1, 2] において強磁性が実現されるのは，ランダウ準位占有率が $\nu = 1/(2m+1)$（$m$: 整数）の場合である．この Quantum Hall Ferromagnetism と呼ばれる強磁性は，ゼーマン・エネルギーがゼロの極限ですら実現され，電子間の交換相互作用をその主な要因としている．ただ，実際の量子ホール系においては，ゼーマン・エネルギーはゼロではなく有限であるから，強磁性基底状態の縮退は無い．結局，基底状態は全電子がゼーマン・エネルギーの低いスピン状態（以下では，スピン $\sigma =\uparrow$ と記す）に入ったラフリン状態となる．

この Quantum Hall Ferromagnet については，最近は基底状態よりもむしろ低エネルギー励起に注目が集まっており，系の低温での特性がいろいろ追究されている．特に，試料に高圧をかけて $g$ 因子の大きさを制御することにより，ゼーマン・エネルギーが十分小さい場合の熱励起ギャップが測られ，スカーミオンと考えられる多重スピン・フリップ励起の熱励起ギャップへの関与が，$\nu = 1$ だけでなく $\nu = 1/3$ でも確認されている [3, 4]．なお，多重スピン・フリップ励起が関与するための条件は，$\nu = 1$ よりも条件が厳しい $\nu = 1/3$ の時には，ゼーマン・エネルギー $g\mu_{\mathrm{B}}B$ が電子間相互作用の特徴的な強さ $e^2/\epsilon\ell$（$\ell \equiv \sqrt{c\hbar/eB}$ は磁気長）の約 1/100 以下というものである [4]．

一方，ゼーマン・エネルギーがこの臨界値よりも大きく，熱励起ギャップにスピン励起が関与しない場合でも，低エネルギー励起である強磁性スピン波が系の低温での特性を支配する．実際，$\nu = 1/3$ の分数量子ホール状態が熱励起ギャップよりもかなり低い温度で不安定化するのは，スピン波の熱励起のためとされている [5]．また，ラマン散乱の実験 [5] において，ある有限波長のスピン波が示す励起エネルギーの温度依存性から，Hartree-Fock

[1] E-mail: nakajima@cmpt01.phys.tohoku.ac.jp

近似によって系の磁化の温度依存性を求めると，それは同様のパラメータを持つ系に対する核磁気共鳴の実験結果 [6] とコンシステントでない．

一般に，遍歴電子強磁性 [7] の問題に対して，Hartree-Fock 近似が有限温度で不十分なのは今では周知のことであり，それを越えた理論的アプローチが求められる．実際，この量子ホール系における遍歴電子強磁性に対しても，Hartree-Fock 近似での自己エネルギーに準粒子とスピン波との相互作用から来る補正を加えた理論 [8]，パラメータとしての spin stiffness を実際の量子ホール系での値に合わせたスピン模型の理論 [9] などがある．しかし，前者は系の低温での磁気特性をうまく説明できず，後者もこの長距離相互作用を持つ遍歴電子系の特性をどの程度まで記述できるのか不明である．

これらの理論的アプローチに対して，我々はスピン系の低温での特性をうまく記述するボゾン化法に着目し，それをフェルミオン系に拡張した手法 [10] を量子ホール系に適用した．具体的には，まず電子系のハミルトニアンをボゾン・ハミルトニアンにマップし，そのモード間相互作用によって繰り込まれるスピン波分散に対して，1 次のオーダーの表式を求めた．以下では，このアプローチを詳しく説明する．

## 2　ボゾン・ハミルトニアン

占有率 $\nu = 1/(\text{奇数})$ における強磁性を考える際に，基本となるのは整数占有率 $\nu = 1$ の場合である．実際，$\nu = 1/(2m+1)$（$m$: 整数）の分数量子ホール状態は，平均場近似では (電子に磁束量子を $2m$ 本貼り付けた) 複合フェルミオンの $\nu = 1$ 整数量子ホール状態に他ならず，そこからの低エネルギー励起であるスピン波も複合フェルミオン理論で定量的に記述できる [2, 11]．よって，ここでは $\nu = 1$ の (球面上の) 量子ホール系を考える．

$\nu = 1$ の量子ホール系の基底状態は，スピン $\sigma = \uparrow$ の最低ランダウ準位が電子によって完全に満たされ，$\sigma = \downarrow$ の最低ランダウ準位が空の状態である．よって，あるランダウ軌道から $\uparrow$ スピンの電子を消し，別の軌道に $\downarrow$ スピンの電子を生成した電子・正孔対を基底として，基底状態からの励起を表現できる．特に，集団励起であるスピン波はこうした 1 スピン・フリップ励起の重ね合わせであり，波数に相当する量子数を持つ．こうして，多重スピン・フリップ励起を含む任意のスピン励起は，スピン波を基底として表現できる．

しかし，スピン波は近似的にはボゾンであっても，厳密にはそうでない．このため，その取り扱いには工夫を要し，電子・正孔対の生成演算子をボゾン交換関係を正しく満たす演算子で展開するという手法（ボゾン展開法）が用いられる．ハミルトニアンをこの真のボゾンで表現する際には，多電子系の非線形性を反映してハミルトニアンには相互作用項が現れる．実際，$\nu = 1$ の Quantum Hall Ferromagnet に対するボゾン・ハミルトニアン

$$H = \sum_{\mu} \epsilon_\mu B_\mu^\dagger B_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu,\rho,\tau} \langle \lambda\mu | \tilde{V} | \rho\tau \rangle B_\lambda^\dagger B_\mu^\dagger B_\rho B_\tau \tag{1}$$

には，ボゾン（以下では‘マグノン’とも称する）間の相互作用 $\tilde{V}$ が存在する．ここで，$B_\mu$ は波数に相当する量子数 $\mu$ を持つボゾンの消滅演算子であり，$\epsilon_\mu$ はそのエネルギーである．

なお，この相互作用項を無視すれば，理論は平均場近似に帰着する．

こうして得られたボゾン・ハミルトニアンを用いて，我々は系の低温での特性を平均場近似を越えて追究する．なお，多電子系の非線型性を反映したモード間相互作用 $\tilde{V}$ に関しては，その行列要素を Dyson 型マッピング及び 1 次までの Holstein-Primakoff 型マッピングに対して求めた．

# 3 グリーン関数とスピン波分散の繰り込み

ここで，モード間相互作用によるスピン波分散の繰り込み [12] について考えよう．そのために，ボゾン $B_\mu$ に対する遅延グリーン関数 [13]

$$\langle\langle B_\mu ; B_\mu^\dagger \rangle\rangle \equiv \frac{1}{i\hbar}\,\theta(t)\,\langle\, [\, B_\mu(t),\, B_\mu^\dagger\, ]\,\rangle \tag{2}$$

を導入する．ここで，$B_\mu(t)$ は式 (1) のハミルトニアンに対するボゾン $B_\mu$ のハイゼンベルク表示である．また，$\theta(t)$ は階段関数であり，$\langle\cdots\rangle$ は熱平均を意味する．

このグリーン関数に対する運動方程式を，Tyablikov の切断近似 [14] により相互作用 $\tilde{V}$ の 1 次のオーダーで解くと，その時間に関するフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \langle\langle B_\mu ; B_\mu^\dagger \rangle\rangle_\omega &= \frac{1}{\hbar\omega - \epsilon_\mu - \Sigma_\mu^{(1)}}, \\ \Sigma_\mu^{(1)} &= 2\sum_\tau \tilde{V}_{\mu\tau}\,\langle B_\tau^\dagger B_\tau \rangle \end{aligned} \tag{3}$$

となる．ここで，$\tilde{V}_{\mu\tau}$ は相互作用 $\tilde{V}$ のモード $\mu$，$\tau$ 間の (対称化された) 行列要素であり，$\langle B_\tau^\dagger B_\tau \rangle$ はモード $\tau$ のマグノンの平均の数である．つまり，この $\Sigma_\mu^{(1)}$ がスピン波分散に対する 1 次の補正を与え，繰り込まれたスピン波分散は

$$\epsilon_\mu^{\rm ren} = \epsilon_\mu + 2\sum_\tau \tilde{V}_{\mu\tau}\,\langle B_\tau^\dagger B_\tau \rangle \tag{4}$$

となる．

今は温度 $T$ における熱平均を考えているから，モード $\tau$ のマグノンの平均の数は

$$\langle B_\tau^\dagger B_\tau \rangle = \frac{1}{\exp\left[\,\epsilon_\tau^{\rm ren}/k_{\rm B}T\,\right] - 1} \tag{5}$$

となる．結局，マグノンの熱励起によるスピン波分散の繰り込みを調べるには，式 (4) と式 (5) をセルフ・コンシステントに解けばよく，その繰り込まれた分散はゼーマン・エネルギーと温度の関数として決まる．そして，系の温度 $T$ における磁化は

$$\langle S_z \rangle = S_{\rm max} - \sum_\tau \langle B_\tau^\dagger B_\tau \rangle \tag{6}$$

により与えられる．ここで，$S_{\rm max}$ は基底状態における磁化であり，系の電子数を $N$ とすると $S_{\rm max} = N/2$ となる．

また，モード $\mu$，$\tau$ の間の相互作用 $\tilde{V}_{\mu\tau}$ は，どちらかのモードが波数ゼロに対応する場合はゼロになる．このため，繰り込まれた分散 $\epsilon_{\mu}^{\mathrm{ren}}$ は有限温度でも長波長極限でゼーマン・エネルギー $g\mu_{\mathrm{B}}B$ に等しくなり，南部・ゴールドストーン定理を満たす．また，波数ゼロのモードは他モードの分散の繰り込みに寄与しない．そして，$T=0$ ではマグノンの熱励起が無いから，分散の補正 $\Sigma_{\mu}^{(1)}$ は全てのモード $\mu$ に対してゼロとなる．

# 4 まとめ

Quantum Hall Ferromagnet の低温での特性を調べるために，我々は多電子系のハミルトニアンを相互作用するマグノンのハミルトニアンにマップした．そして，モード間相互作用によって繰り込まれたスピン波分散を，相互作用の1次のオーダーまで定式化した．

# 参考文献


[1] 吉岡大二郎,『量子ホール効果』(岩波書店, 1998).

[2] 中島龍也・青木秀夫,『多体電子論 III 分数量子ホール効果』(東大出版会, 1999).

[3] D.K. Maude *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 4604.

[4] D.R. Leadley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 4246.

[5] H.D.M. Davies *et al.*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 4095.

[6] P. Khandelwal *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 673.

[7] T. Moriya, *Spin Fluctuations in Itinerant Electron Magnetism* (Springer, 1985).

[8] M. Kasner and A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3204; R. Haussmann, Phys. Rev. B **56** (1997), 9684.

[9] N. Read and S. Sachdev, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 3509; C. Timm *et al.*, Phys. Rev. B **58** (1998), 1464.

[10] 例えば, E. Hanamura and H. Haug, Phys. Rep. **33** (1977), 209.

[11] T. Nakajima and H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **73** (1994), 3568.

[12] 素励起スペクトルの繰り込みに関しては, 例えば中嶋貞雄ほか,『物性 II — 素励起の物理(第2版)』(岩波書店, 1978).

[13] 例えば, R.A. Tahir-Kheli in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 5b, ed. by C. Domb and M.S. Green (Academic Press, 1976).

[14] N.N. Bogoliubov and S.V. Tyablikov, Doklady Akad. Nauk, S.S.S.R., **126** (1959), 53 (Soviet Phys. - Doklady **4** (1959), 604).